Durée : 1 heure. Aucun document autorisé. Ce contrôle sera noté sur ***10 points****. Justifier TOUT.*

Convention : On utilisera la lettre x (*resp.* z) pour une variable réelle (*resp.* complexe).

1. (4 pts) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\sum_n 2^n z^{2n}$,

b) $\sum_n n^{\ln n} z^n$,

c) $\sum_n \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$,

d) $\sum_n n\cos(\frac{n\pi}{2}) z^n$.

2. (2 pts) Donner des exemples :

a) une série entière dont le domaine de convergence est *exactement* $D(0,1)$;

b) une série entière dont le domaine de convergence est *exactement* $\overline{D}(0,1)$;

3. (2 pts) Application du théorème d'Abel radial.

a) Montrer que $\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ pour $x \in]-\rho,\rho[$, où ρ est son rayon de convergence que vous déterminerez. (Indication : considérer la série géométrique $\sum_{n\geq 0} x^n$.)

b) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

4. (4 pts + Bonus 2 pts) Vrai ou faux ? Justifier si vrai, en donner un contre-exemple si faux.

Soit $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1.

a) Si $S(1)$ converge, alors $\lim_{x\to 1^-} S(x)$ existe.

b) Si $\lim_{x\to 1^-} S(x)$ existe, alors $S(1)$ converge.

c) La série dérivée $S'(z) = \sum_n n a_n z^{n-1}$ converge partout sur $D(0,1)$.

d) La série dérivée $S'(z) = \sum_n n a_n z^{n-1}$ converge partout où $S(z)$ converge.

e) Si $S(z)$ converge uniformément sur $D(0,1)$, alors $S(z)$ converge sur $\overline{D}(0,1)$. (Un peu dur.)

f) Si $S(z)$ converge sur $\overline{D}(0,1)$, alors $S(z)$ converge uniformément sur $D(0,1)$. (Dur. Devinez !)

5. (1 pt) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, dénotons par φ_n la fonction $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{int}$. Calculer soigneusement l'intégrale $\int_0^{2\pi} \varphi_m \overline{\varphi_n}$ pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$.

Fin du sujet.

En dehors du CC : (Théorème de Liouville) Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$ tout entier. On se propose de montrer que

Si $f(z)$ est bornée sur $\mathbb{C}$ par une constante $M > 0$, alors $f(z)$ est une constante.

a) Soit $R > 0$. Montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ est absolument convergente.

b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, la série

$$\sum_{n\geq 0} a_n R^{n-N} e^{i(n-N)\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

en la variable θ converge normalement vers la fonction $\frac{f(Re^{i\theta})}{R^N e^{iN\theta}}$.

c) Calculer $\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

d) En déduire que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{R^N e^{iN\theta}} d\theta = a_N.$$

e) Montrer que $|a_N| \leq \frac{M}{R^N}$. En conclure.

On pourrait aussi considérer la réciproque d'Exercice 4 (e) : si $S(z)$ converge sur $\overline{D}(0,1)$, alors $S(z)$ converge uniformément sur $D(0,1)$. Celle-ci est fausse, cependant le contre-exemple n'est pas facile à construire ; voici une construction sous forme d'« exercice ».

Considérons la série entière

$$S(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k, \quad \text{avec} \quad a_k = \sum_{n\geq 0} \delta_n \frac{1}{(1+i\varepsilon_n)^n}.$$

où $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites dans $\mathbb{R}_{>0}$ tendant vers 0 telles que

(ACV) La série numérique $\sum_n \frac{\delta_n}{\varepsilon_n}$ converge ;

(DV) La suite $(\frac{\delta_n}{\varepsilon_n^2})_n$ diverge vers $+\infty$.

Cet exercice a pour but de montrer que $S(z)$ converge sur $\overline{D}(0,1)$ mais la convergence n'y est pas uniforme.

a) Justifier que les a_k sont bien définis. Donner un exemple de $(\delta_n)_n$ et $(\varepsilon_n)_n$ vérifiant *toutes* les conditions ci-dessus, de sorte que cet exercice n'est pas vide ! (Indication : considérer des suites de type $1/n^\alpha$.)

b) (Question sur des séries numériques.) Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique absolument convergente. Soit $(\lambda_n)_n$ une suite dans $D(0,1)$. Montrer que la suite numérique $(\sum_n u_n\lambda_n^N)_{N\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_n u_n\lambda_n^N = 0.$$

Vous pourrez montrer d'abord que $\left|\sum_n u_n\lambda_n^N\right| \leq \sum_{n=0}^m |a_n| \left|\lambda_n\right|^N + \sum_{n=m+1}^{+\infty} |a_n|$ pour tout $m\in\mathbb{N}$.

c) Soit $z\in\overline{D}(0,1)$. Montrer que $|1+i\varepsilon_n - z| \geq \varepsilon_n$ si $z=1$, et $|1+i\varepsilon_n - z| \geq \mathrm{Re}(1-z) > 0$ si $z\neq 1$. En déduire l'absolue convergence de $\sum_n \frac{\delta_n}{1+i\varepsilon_n - z}$ pour tout $z\in\overline{D}(0,1)$.

d) Montrer que

$$\sum_{k=0}^N a_k z^k - \sum_{n\geq 0} \frac{\delta_n}{1+i\varepsilon_n - z} = -\sum_{n\geq 0} \frac{\delta_n}{1+i\varepsilon_n - z}\left(\frac{z}{1+i\varepsilon_n}\right)^{N+1}.$$

En déduire que $S(z)$ converge partout sur $\overline{D}(0,1)$ et que sa somme fait

$$S(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{\delta_n}{1+i\varepsilon_n - z}.$$

e) Soit $z\in\overline{D}(0,1)$. Montrer que $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+i\varepsilon_n - z}\right) = \frac{\mathrm{Re}(1-z)}{|1+i\varepsilon_n - z|^2} \geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En déduire que

$$\mathrm{Re}\, S(z) \geq \frac{\mathrm{Re}(1-z)}{|1+i\varepsilon_n - z|^2}, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

f) Posons $z_n = \frac{1+i\varepsilon_n}{|1+i\varepsilon_n|}$ (qui est l'intersection de $[0, 1+i\varepsilon_n]$ avec le cercle unité). Montrer que

$$\frac{\mathrm{Re}(1-z_n)}{|1+i\varepsilon_n - z_n|^2} \sim \frac{2\delta_n}{\varepsilon_n^2}, \quad n\to+\infty.$$

g) Montrer que $S(z)$ n'est pas bornée sur $\overline{D}(0,1)$. En conclure.